Devoir sur Table 5

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
3. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
4. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
5. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
6. Mettez en évidence vous résultats en les encadrant.
7. Conformément au règlement de la Banque PT
   — Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
   — L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

— Mise en évidence des résultats

— Soin et lisibilité de la copie. Les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle

— Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur

— Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1

(*CCINP PC 2019*)

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3 \qquad (E)$$

Partie I — Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \qquad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r > 0$. On définit la fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière.

   Exprimer avec la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que pour tout $x \in]-r, r[$, on a :
$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$
3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $r \geqslant 1$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$
5. Réciproquement, montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction
$$g :]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$
est une solution de (H) sur $]-1, 1[$ développable en série entière.

Partie II — Solutions de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation :
$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

6. Justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.
7. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle :
$$xz'' + z' = 2x. \tag{E_1}$$
8. Montrer que si z est solution de (E_1) sur I, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$
9. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

Partie III — Solutions de (E) sur $]0,+\infty[$

10. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 2

(Concours ATS 2004)

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note I, J et $M(a, b, c)$ les matrices suivantes
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$. $j^2 = \bar{j} = \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{3}}$ est une autre racine cubique de l'unité.

Partie I

1. Calculer J^2 et J^3.
2. Déterminer les valeurs propres de J. La matrice J est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$? L'est-elle sur le corps $\mathbb{R}$?
3. Pour chaque valeur propre de J déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice P de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

4. Exprimer la matrice $M(a,b,c)$ à l'aide des matrices I, J et J^2.

   En déduire que $H = \{M(a,b,c)\ ,\ (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Précisez la dimension de H.
5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de J sont aussi vecteurs propres de J^2 ainsi que de $M(a,b,c)$.

   En déduire les valeurs propres de $M(a,b,c)$ à l'aide de celles de J, puis en fonction du nombre complexe j.
6. Montrer que tout élément de H est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $M(a,b,c)$ en fonction de la matrice P de la question 3. et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.
7. On suppose ici que les coefficients (a,b,c) sont réels.
   (a) Montrer que toutes les valeurs propres de $M(a,b,c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$ ainsi que les sous-espaces propres réels associés.

Partie II

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note Id l'endomorphisme identité de E. Dans cette partie, on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de Id dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $M(a,b,c)$, en supposant que les coefficients (a,b,c) sont réels.

Il est recommandé d'utiliser les résultats trouvés dans la première partie.

1. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1. Préciser les sous-espaces propres associés.

   Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.
2. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0. Préciser les sous-espaces propres associés.

   Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.
3. (a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes une matrice 3×3 à coefficients réels représente-t-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une rotation ?
   (b) Montrer que J et J^2 sont des matrices de rotation de E. Préciser les éléments caractéristiques de ces rotations.
   (c) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $a + b + c = 1$. En déduire que $ab + bc + ca = 0$.

   Préciser les éléments caractéristiques de cette rotation en fonction de (a,b,c).

Exercice 3
(*Banque PT, Maths A 2023*)

Un jeu consiste à lancer un ballon dans un panier. On suppose que la probabilité de réussir le panier est $p \in]0,1[$ et que les lancers sont indépendants. On note $q = 1 - p$.

Partie I — Étude du jeu de lancer

1. On note T le nombre de lancers nécessaires pour réussir un panier pour la première fois. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire T ?

   On explicitera la loi sans démonstration.
2. On effectue une infinité de lancers. Calculer la probabilité de réussir au moins un panier.
3. L'organisateur du jeu ne connaît pas la valeur de p et souhaite en connaître une valeur approchée. Pour cela il observe $N \in \mathbb{N}^*$ lancers et note le nombre S_N de paniers réussis.
   (a) Quelle est la loi de S_N ? *On explicitera la loi en justifiant brièvement la réponse.*
   (b) Montrer que $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$
   (c) Montrer que pour $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4N\varepsilon^2}$

Partie II — Un deuxième jeu

Le joueur met une pièce de 1 euro dans un sac à chaque lancer du ballon. Une fois le panier réussi, l'organisateur organise un deuxième jeu :

— L'organisateur enlève une pièce de 1 euro, qu'il garde pour lui, et la remplace par une pièce noire qui donne droit à $M \geqslant 2$ euros.

— Le joueur tire une pièce du sac.

— L'organisateur conserve les autres pièces du sac.

On rappelle que la variable T a été définie à la question 1 .

4. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$ et l'événement $(T = n)$ est réalisé : il y a donc n pièces dans le sac : $n-1$ pièces de 1 euro et la pièce noire.

   On note G_n la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur.

   (a) Vérifier que $G_n(\Omega) = \{n-M, n-1\}$, puis donner la loi de G_n.

   (b) Calculer l'espérance de G_n.

5. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et les exprimer à l'aide de fonctions usuelles : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$.

   On pourra utiliser ces résultats dans les calculs des questions suivantes.

6. On note A l'événement « tirer la pièce noire ».

   (a) Exprimer pour $n \in N^*$ la valeur de $\mathbb{P}(A|T = n)$.

   (b) En utilisant la formule des probabilité totales, dont on justifiera l'utilisation, montrer que
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q} \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

7. On note G la variable aléatoire égale au gain, éventuellement négatif, de l'organisateur après ce deuxième jeu.

   (a) Montrer que $G(\Omega) = \{k \in \mathbb{Z}, k \geqslant 1-M\}$.

   (b) Donner pour $n \in N^*$ et $k \in G(\Omega)$ la valeur de $\mathbb{P}(G = k|T = n)$.

   On distinguera les cas $k = n-1, k = n-M$ et $k \notin \{n-1, n-M\}$.

   (c) En déduire que la loi de G est donnée par :
   $$\forall k \in G(\Omega), \qquad \mathbb{P}(G = k) = \begin{cases} \dfrac{k}{k+1} pq^k + \dfrac{1}{k+M} pq^{k+M-1} & \text{si } k \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{k+M} pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

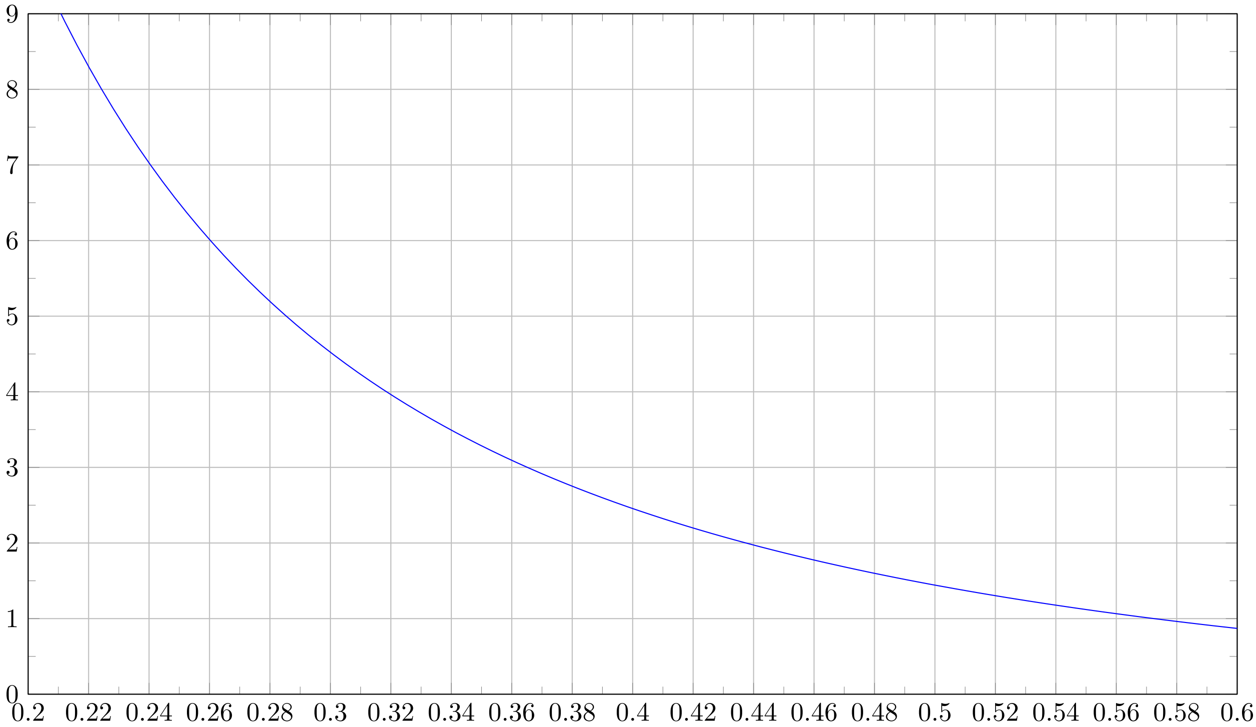
8. *Calcul de l'espérance de G.*

   (a) Montrer que la série de terme général $\mathbb{E}(G_n)\,\mathbb{P}(T = n)$ est convergente.

   (b) On admet qu'alors G admet une espérance et
   $$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(G_n)\,\mathbb{P}(T = n)$$

   Calculer $\mathbb{E}(G)$, que l'on exprimera en fonction de p et M uniquement.

9. Voici un extrait de la courbe représentative de la fonction $\psi : p \mapsto \left(\dfrac{1-p}{p}\right)^2 \dfrac{1}{\ln \frac{1}{p}}$.



On dira que le jeu est rentable pour l'organisateur lorsque son espérance de gain est positive.
Dans les questions suivantes, on justifiera les résultats obtenus.

(a) Montrer que $\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \psi(p) \geqslant M - 1$.

(b) L'organisateur sait que $p = 0.3$. Quelles valeurs de M peut-il choisir pour que le jeu soit rentable ?

(c) L'organisateur souhaite choisir $M = 8$ euros. Quelle valeur maximale de p doit-on avoir pour que ce jeu reste rentable ?

(d) Pour quelles valeurs de p le jeu ne peut pas être rentable ?

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

Partie I — Solution particulière de l'équation homogène

1. f est développable en série entière sur $]-r,r[$, donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-r,r[}$ et, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}}$$

Ainsi $\boxed{f' \text{ et } f'' \text{ sont développables en série entière sur }]-r,r[.}$

De plus, d'après le cours, les séries entières définissant f, f' et f'' ont le même rayon de convergence r.

2. Pour $x \in]-r,r[$, on a alors

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= x^2(1-x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \textit{(changement d'indice)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \left(\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n - 0\right) - \left(a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n\right) \\
&\qquad - \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^n + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \\
&= a_0 + a_1 x - a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\big(n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n\big)x^n\right) \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n.
\end{aligned}$$

En posant, pour tout $n \geqslant 2$, $b_n = (n-1)^2$, on a donc bien, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$\boxed{x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n}$$

3. f est solution de (E) sur $]-r,r[$ si et seulement si pour tout $x \in]-r,r[$,

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière sur $]-r,r[$, on a alors

$$\left(\forall x \in]-r,r[,\ a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2, (n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geqslant 2, a_n = a_{n-1} \end{cases}.$$

D'où $\boxed{f \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-r,r[\text{ si et seulement si } a_0 = 0 \text{ et } a_{n+1} = a_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

4. La suite (a_n) est donc stationnaire à partir du rang 1, donc, en posant $\lambda = a_1 \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = a_1 = \lambda$ et $a_0 = 0$.

Par suite, si f est solution de (H) sur $]-r,r[$, alors $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$.

Or, la série entière $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $r \geqslant 1$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n = \lambda x \frac{1}{1-x} = \frac{\lambda x}{1-x} \quad \textit{(série géométrique de raison } x \in]-1,1[\textit{)}.$$

Remarque
On a $r \geqslant 1$ car, dans le cas $\lambda = 0$, on a $r = +\infty$. Cependant, pour tout $\lambda \neq 0$, on aura $r = 1$.

Ainsi $\boxed{\text{si } f \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-r,r[, \text{ alors } r \geqslant 1 \text{ et il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que :}}$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}}$$

5. Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g \; : \; \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\lambda x}{(1-x)} = \lambda x \times \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$ (car $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ l'est) et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = \lambda x \frac{1}{1-x} = \lambda x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n.$$

Par suite, d'après la question 3, g est solution de (H) sur $]-1,1[$.

Ainsi $\boxed{\text{pour } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } g : x \mapsto \dfrac{\lambda x}{1-x} \text{ est solution de } (H) \text{ sur }]-1,1[.}$

Finalement, par analyse synthèse : les solutions de (H) développables en série entière au voisinage de 0 sont les fonctions $x \mapsto \frac{\lambda x}{1-x}$, qui seront solutions de (H) sur $]-1,1[$ (et même $\mathbb{R}$ dans le cas $\lambda = 0$).

Partie II — Solutions de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

6. $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\boxed{z \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } I}$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\boxed{z'(x) = -\frac{1}{x^2} y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x) \qquad \text{et} \qquad z''(x) = \frac{2}{x^3} y(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x)}$$

7. Supposons que y est solution de (E) sur I, alors y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, donc, d'après 6, $z : x \mapsto \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} xz''(x) + z'(x) &= x\left(\frac{2}{x^3} y(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x)\right) + \left(-\frac{1}{x^2} y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x)\right) \\ &= \frac{2y(x) - 2xy'(x) + x^2(1-x)y''(x) - y(x) + x(1-x)y'(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2(1-x)y''(x) - x(x+1)y'(x) + y(x)}{x^2} \\ &= \frac{2x^3}{x^2} \quad \textit{(car } y \textit{ est solution de } (E) \textit{ sur } I\textit{)} \end{aligned}$$

$$= 2x,$$

Donc z est bien solution de (E_1) sur I.

Réciproquement, si z est solution de (E_1) sur I, alors z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
De plus, pour tout $x \in I$, comme $x \notin \{0, 1\}$,

$$z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x) \Leftrightarrow z(x) = \frac{1-x}{x} y(x) \Leftrightarrow y(x) = \frac{x}{1-x} z(x) \Leftrightarrow y(x) = \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) z(x),$$

Par suite, y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout $x \in I$,

$$xz''(x) + z'(x) = \frac{x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)}{x^2}$$

d'après le calcul fait dans le point précédent, donc

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = x^2(xz''(x) + z'(x)) = x^2(2x) = 2x^3$$

car z est solution de (E_1) sur I. y est donc bien solution de (E) sur I.
Conclusion : $\boxed{\text{Par double-implication, } y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \text{ si et seulement si } z \text{ est solution de } (E_1).}$

8. z est solution de (E_1) sur I si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle $xy' + y = 2x \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x} y = 2$.

   L'équation homogène $y' + \frac{1}{x} y = 0$ a pour solutions $x \mapsto \lambda e^{-\ln x} = \frac{\lambda}{x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   $x \mapsto x$ est une solution particulière de $y' + \frac{1}{x} y = 2$ sur I.

   L'ensemble des solutions de $y' + \frac{1}{x} y = 2$ sur I est donc

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x} + x \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   Ainsi $\boxed{z \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } I \text{ si et seulement si } z' : x \in I \mapsto \frac{\lambda}{x} + x, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.}$

   Remarque

   On a démontré plus que l'implication demandée par l'énoncé car l'équivalence nous sera utile et ne coute rien ici...

9. On a donc :

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } I \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall x \in I, z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall x \in I, z(x) = \lambda \ln(x) + \frac{x^2}{2} + \mu \quad \textit{(car } I \textit{ est un intervalle et } x > 0) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \forall x \in I, y(x) = \frac{x}{1-x} z(x) = \frac{2\lambda x \ln(x) + x^3 + 2\mu x}{2(1-x)}. \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } I \text{ est :}}$

$$\boxed{\left\{ x \mapsto \frac{\lambda x \ln(x) + x^3 + \mu x}{2(1-x)}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

Partie III — Solutions de (E) sur $]0, +\infty[$

10. On va procéder par Analyse-Synthèse

    Analyse : Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors

    — f est solution de (E) sur $]0, 1[$, donc, d'après la partie II, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) = \frac{ax \ln(x) + x^3 + bx}{2(1-x)}.$$

— f est solution de (E) sur $]1,+\infty[$, donc, d'après la partie II, il existe $(c,d)\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x\in]0,1[,\quad f(x)=\frac{cx\ln(x)+x^3+dx}{2(1-x)}.$$

— Pour tout $x>1$, en posant $x=1+h\Leftrightarrow h=x-1$, on a

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(1+h)\\
&=\frac{c(1+h)\ln(1+h)+(1+h)^3+d(1+h)}{-2h}\\
&\underset{h\to0}{=}\frac{c(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)+1+3h+3h^2+o(h^2)+d+dh}{-2h}\\
&\underset{h\to0}{=}\frac{ch+ch^2-c\frac{h^2}{2}+1+3h+3h^2+d+dh+o(h^2)}{-2h}\\
&\underset{h\to0}{=}-\frac{1+d}{2h}-\frac{c+d+3}{2}-\frac{c+6}{4}h+o(h)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x)\underset{x\to1^+}{=}-\frac{1+d}{2(x-1)}-\frac{c+d+3}{2}-\frac{c+6}{4}(x-1)+o(x-1)$$

et, pour tout $x\in]0,1[$, en posant $x=1-h\Leftrightarrow h=1-x$, on a

$$\begin{aligned}
f(x)&=f(1-h)\\
&=\frac{a(1-h)\ln(1-h)+(1-h)^3+b(1-h)}{2h}\\
&\underset{h\to0}{=}\frac{a(1-h)\left(-h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)+1-3h+3h^2+o(h^2)+b-bh}{2h}\\
&\underset{h\to0}{=}\frac{-ah+ah^2-a\frac{h^2}{2}+1-3h+3h^2+b-bh+o(h^2)}{2h}\\
&\underset{h\to0}{=}\frac{1+b}{2h}-\frac{a+b+3}{2}+\frac{a+6}{4}h+o(h)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f(x)\underset{x\to1^-}{=}=-\frac{1+b}{2(x-1)}-\frac{a+b+3}{2}-\frac{a+6}{4}(x-1)+o(x-1)$$

— f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1, donc f doit avoir une limite finie en 1^+ et 1^-.

Or, d'après le calcul précédent, si $d\neq-1$,

$$f(x)\underset{x\to1^+}{\sim}-\frac{1+d}{2(x-1)}\underset{x\to1^+}{\sim}\pm\infty\qquad\textit{(selon le signe de } 1+d\textit{)}$$

Donc on doit avoir $d=-1$.

De même, pour avoir une limite en 1^-, on doit avoir $1+b=0$, i.e. $b=-1$.

— Comme f est continue en 1, on doit avoir, avec les valeurs imposées pour b et d, on a :

$$-\frac{c+2}{2}=\lim_{x\to1^+}f(x)=f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=-\frac{a+2}{2},\quad\text{donc}\quad a=c\quad\text{et}\quad f(1)=-\frac{c+2}{2}.$$

Si f existe, alors il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f(x)=\begin{cases}-\dfrac{a+2}{2} & \text{si } x=1\\ \dfrac{ax\ln(x)+x^3-x}{2(1-x)} & \text{si } x\neq1\end{cases}$$

Synthèse : Réciproquement, si f est définie ainsi, alors,

— f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$ par opérations sur les fonctions usuelles.

— Pour tout $x \in]0,2[\setminus\{1\}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{ax\ln(x)+x^3-x}{2(1-x)} = a\frac{x\ln(x)}{2(1-x)} - \frac{x(x+1)}{2} \\
&= a\frac{(1+h)\ln(1+h)}{-2h} - \frac{(1+h)(2+h)}{2} \quad \textit{(en posant } x=1+h \textit{ avec } h\in]-1,1[\setminus\{0\}\textit{)} \\
&= -a\frac{1+h}{2h}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} - \frac{(1+h)(2+h)}{2} \quad \textit{(DSE de } \ln(1+t) \textit{ pour } t\in]-1,1[\textit{)} \\
&= -\frac{a(1+h)}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n h^n}{n+1} - \frac{(1+h)(2+h)}{2} \\
&= g(x-1),
\end{aligned}$$

où $g : t \mapsto -\dfrac{a(1+t)}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n+1} - \frac{(1+t)(2+t)}{2}$.

L'égalité est encore valable pour $x=1$ car $f(1) = -\dfrac{a+2}{2}$ et $g(0) = -\dfrac{a}{2}\times\dfrac{1}{1} - \dfrac{1\times 2}{2} = -\dfrac{a+2}{2}$,

Donc pour tout $x \in]0,2[$, $f(x) = g(x-1)$.

Or, g est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc g est en particulier de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$,

Ainsi $f : x \mapsto g(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,2[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ en 1, et, par suite, sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Enfin, par construction, f est solution de E sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

De plus, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ en 1, $x \mapsto x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)$ est continue en 1, donc

$$\begin{aligned}
1^2(1-1)y''(1) - 1(1+1)y'(1) + y(1) &= \lim_{x\to 1} x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) \\
&= \lim_{x\to 1} 2x^3 \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]0,1[\text{ et sur }]1,+\infty[) \\
&= 2\times 1^3 = 2,
\end{aligned}$$

donc f est aussi solution de (E) en 1.

Conclusion : $\boxed{\text{Les fonctions solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ sont les fonctions}}$

$$\boxed{x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{a+2}{2} & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{ax\ln(x)+x^3-x}{2(1-x)} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.}$$

Corrigé de l'exercice 2

Partie I

1. On a

$$\boxed{J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = I}$$

2. Un simple calcul nous donne $\chi_J = X^3 - 1$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(J) = \{1, j, j^2\}}$.

   Sur $\mathbb{C}$, J est une matrice carrée de taille 3 qui admet 3 valeurs propres distinctes, $\boxed{\text{elle est donc diagonalisable sur } \mathbb{C}.}$

   Sur $\mathbb{R}$, J admet une seule valeur propre 1 et $J \neq I_3$, $\boxed{J \text{ n'est donc pas diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$

3. Pour la valeur propre 1 on obtient $E_1(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. On prend donc le vecteur $\boxed{U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}$.

   Pour la valeur propre j on obtient $E_j(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}\right)$. On prend donc le vecteur $\boxed{V = \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}}$.

   Pour la valeur propre j^2 on obtient $E_{j^2}(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}\right)$. On prend donc le vecteur $\boxed{W = \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}}$.

   Ainsi $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & j & j^2\\1 & j^2 & j\end{pmatrix}}$.

4. On a $\boxed{M(a,b,c) = aI + bJ + cJ^2}$.

   Ainsi $H = \text{Vect}(I, J, J^2)$. $\boxed{H \text{ est donc un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$.

   (I, J, J^2) est une famille génératrice de H.

   Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aI + bJ + cJ^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$, on a donc $M(a,b,c) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, d'où $a = b = c = 0$.

   La famille (I, J, J^2) est ainsi une base de H et donc $\boxed{\dim(H) = 3}$.

5. Soit $X \in E_1(J)$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X = \lambda U$.

   Alors $J^2X = X$ et $M(a,b,c)X = (a+b+c)X$.

   X est donc un vecteur propre de J^2 et de $M(a,b,c)$.

   Soit $Y = \mu V \in E_j(J)$, alors, (comme $j^3 = 1$) $J^2Y = j^2Y$ et, $M(a,b,c)Y = (a + jb + j^2c)Y$. Y est donc un vecteur propre de J^2 et de $M(a,b,c)$.

   Enfin, soit $Z = \nu W \in E_{j^2}(J)$, alors, $J^2Z = jZ$ et, $M(a,b,c)Z = (a + j^2b + jc)Z$. Z est donc un vecteur propre de J^2 et de $M(a,b,c)$.

   Finalement $\boxed{\text{les vecteurs propres de } J \text{ sont aussi des vecteurs propres de } J^2 \text{ et } M(a,b,c)}$.

   En particulier on a

$$P^{-1}M(a,b,c)P = \begin{pmatrix}a+b+c & 0 & 0\\0 & a+jb+j^2c & 0\\0 & 0 & a+j^2b+jc\end{pmatrix}$$

   Ainsi $\boxed{\text{Sp}(M(a,b,c)) = \{a + b\lambda + c\lambda^2\ ,\ \lambda \in \text{Sp}(J)\} = \{a+b+c, a+jb+j^2c, a+j^2c+jc\}}$.

6. On a vu que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$,

$$\boxed{P^{-1}M(a,b,c)P = \begin{pmatrix}a+b+c & 0 & 0\\0 & a+jb+j^2c & 0\\0 & 0 & a+j^2b+jc\end{pmatrix}}$$

   $\boxed{\text{Tout élément de } H \text{ est donc diagonalisable.}}$

7. (a) On a $\mathrm{Sp}(M(a,b,c) = \{a+b+c, a+jb+j^2c, a+j^2c+jc\}$.

   Or $a+b+c\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(a+jb+j^2c) = (b-c)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{Im}(a+j^2b+jc) = (c-b)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Ainsi $\boxed{\text{les valeurs propres de } M(a,b,c) \text{ sont toutes réelles si et seulement si } b=c.}$

   (b) On a alors

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M(a,b,c)) == \{a+b+c, a+jb+j^2c, a+j^2c+jc\} = \{a+b+c, \frac{2a-b-c}{2}\} = \{a+2b, a-b\}}$$

   Et

$$\boxed{E_{a+2b}(M(a,b,b)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

$$\boxed{E_{a-b}(M(a,b,b)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)}$$

Partie II

1. Les valeurs propres de $f_{a,b,b}$ sont $a+2b$ et $a-b$. On a

$$\begin{cases} a+2b &= 1 \\ a-b &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= -\dfrac{1}{3} \\ b &= \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b &= -1 \\ a-b &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \dfrac{1}{3} \\ b &= -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

   Ainsi $\boxed{f_{a,b,b} \text{ admet comme valeurs propres 1 et } -1 \text{ si et seulement si } a=-\frac{1}{3} \text{ et } b=\frac{2}{3} \text{ ou } a=\frac{1}{3} \text{ et } b=-\frac{2}{3}.}$

   De plus

$$\boxed{E_1(f_{-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right) \qquad E_{-1}(f_{-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)}$$

$$\boxed{E_{-1}(f_{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right) \qquad E_1(f_{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)}$$

   Dans les deux cas la matrice de $f_{a,b,b}$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est orthogonale et symétrique, $f_{a,b,b}$ est donc la symétrie orthogonale par rapport à $E_1(f_{a,b,b})$.

   Plus précisément $\boxed{f_{-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}} \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite dirigée par le vecteur } e_1+e_2+e_3}$

   et $\boxed{f_{\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}} \text{ est la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation } x+y+z=0.}$

2. Les valeurs propres de $f_{a,b,b}$ sont $a+2b$ et $a-b$. On a

$$\begin{cases} a+2b &= 1 \\ a-b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \dfrac{1}{3} \\ b &= \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b &= 0 \\ a-b &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= \dfrac{2}{3} \\ b &= -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

   Ainsi $\boxed{f_{a,b,b} \text{ admet comme valeurs propres 1 et 0 si et seulement si } a=\frac{1}{3} \text{ et } b=\frac{1}{3} \text{ ou } a=\frac{2}{3} \text{ et } b=-\frac{1}{3}.}$

De plus

$$\boxed{E_1(f_{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right) \qquad E_0(f_{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)}$$

$$\boxed{E_0(f_{\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,1,1)\right) \qquad E_1(f_{\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}}) = \mathrm{Vect}\left((1,-1,0),(1,0,-1)\right)}$$

Dans les deux cas la matrice de $f_{a,b,b}$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est symétrique réelle et admet comme seules valeurs propres 0 et 1. $f_{a,b,b}$ est donc la projection orthogonale sur $E_1(f_{a,b,b})$.

Plus précisément $\boxed{f_{\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}} \text{ est la projection orthogonale sur la droite dirigée par le vecteur } e_1+e_2+e_3}$

et $\boxed{f_{\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}} \text{ est la projection orthogonale sur le plan d'équation } x+y+z=0.}$

3. (a) Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, une matrice M de taille 3×3 à coefficients réels représente une rotation si et seulement si $\boxed{M \text{ est orthogonale (i.e. } MM^\top = I) \text{ et } \det(M) = 1.}$

   Cela est équivalent à ce que $\boxed{\text{les colonnes de } M \text{ forment une base orthonormée directe de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

   (b) Les colonnes de J et de J^2 forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   De plus $\det(J) = \det(J^2) = 1$, ainsi J et J^2 sont des matrices de rotation de E.

   On a $\mathbb{E}_1(J) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

   Posons $U = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

   En notant θ l'angle de la rotation on a $\cos(\theta) = \dfrac{\mathrm{Tr}(J)-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et

$$\sin(\theta) = [U,V,JV] = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1\end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Ainsi $\boxed{J \text{ est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par } e_1+e_2+e_3 \text{ et de mesure d'angle } -\frac{2\pi}{3}}$.

   Puisque la rotation associée à J^2 s'obtient en itérant deux fois la rotation associée à j on en déduit que $\boxed{J^2 \text{ est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par } e_1+e_2+e_3 \text{ et de mesure d'angle } \frac{2\pi}{3}}$.

   (c) $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si les colonnes (C_1,C_2,C_3) de $M(a,b,c)$ sont orthonormées et $\det(M(a,b,c) = 1$

   Or

$$\|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = a^2+b^2+c^2$$
$$\langle C_1, C_2\rangle = langleC_1, C_3\rangle = langleC_2, C_3\rangle = ab+ac+bc$$

   Et

$$\det(M(a,b,c)) = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)$$

   Ainsi

$$f_{a,b,c} \text{ est une rotation vectorielle } \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1\\ ab+ac+bc = 0\\ (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right) = 1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1\\ ab+ac+bc = 0\\ a+b+c = 1\end{cases}$$

   Or $ab+ac+bc = \dfrac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}$.

Ainsi, si $a^2+b^2+c^2=1$ et $a+b+c=1$ alors $ab+ac+bc=0$.

Finalement $\boxed{f_{a,b,c} \text{ est une rotation vectorielle si et seulement si } a^2+b^2+c^2=1 \text{ et } a+b+c=1.}$

Dans ce cas on a de plus $\boxed{ab+bc+ca=0.}$

Posons $U=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $V=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

Comme $a+b+c=1$ on a $M(a,b,c)U=U$

En notant θ l'angle de la rotation on a $\cos(\theta)=\dfrac{\mathrm{Tr}(M(a,b,c)-1}{2}=\dfrac{3a-1}{2}$ et

$$\sin(\theta)=[U,V,M(a,b,c)V]=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{vmatrix}1 & 1 & a-b\\ 1 & -1 & c-a\\ 1 & 0 & b-c\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{2}(c-b)$$

Ainsi

$\boxed{\text{Si } c\geqslant b}$ alors

$\boxed{f_{a,b,c} \text{ est la rotation d'axe dirigé et orienté par } e_1+e_2+e_3 \text{ et de mesure d'angle } \arccos\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)}.$

$\boxed{\text{Si } c\leqslant b}$ alors

$\boxed{f_{a,b,c} \text{ est la rotation d'axe dirigé et orienté par } e_1+e_2+e_3 \text{ et de mesure d'angle } -\arccos\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)}.$

Cas particulier

Si $b=1$ et $c=0$ on retrouve bien que J est la matrice de la rotation d'axe dirigé et orienté par $e_1+e_2+e_3$ et de mesure d'angle $-\arccos\left(\dfrac{-1}{2}\right)=-\dfrac{2\pi}{3}$

Corrigé de l'exercice 3

Partie I — Étude du jeu de lancer

1. T compte l'instant du premier succès dans une succession d'expérience de Bernoulli mutuellement indépendantes, ainsi $\boxed{T \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p.}$
2. On va déterminer la probabilité de l'événement contraire : ne jamais réussir un panier.

   Pour $k\in\mathbb{N}$ notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième lancer est un panier et 0 sinon. On définit l'événement $E_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}[X_k=0]$.

   L'événement « On ne réussit aucun panier »est ainsi $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*}[X_k=0]$.

   On sait qu'alors

   $$\mathbb{P}(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*}[X_k=0])=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=0]\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(E_n)$$

   Or, pour $n\in\mathbb{N}^*$ on a, par indépendance mutuelle $\mathbb{P}(E_n)=q^n$. Puisque $q\in[0,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(E_n)=0$ et donc $\mathbb{P}(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}^*}[X_k=0])$.

   Ainsi la probabilité de ne réussir aucun panier est nul. En passant à l'événement contraire on en déduit que $\boxed{\text{la probabilité de réussir au moins un panier est 1.}}$
3. (a) N étant un entier fixé, S_N est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans une répétition d'expérience de Bernoulli mutuellement indépendantes, ainsi $\boxed{S_N \text{ suit une loi binomiale de paramètre } N \text{ et } p.}$

   (b) Pour $p\in\mathbb{R}$ on a

   $$p(1-p)=p-p^2=\frac{1}{4}-\left(p^2-p+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{4}$$

Ainsi, pour $p \in \mathbb{R}$ on a bien $\boxed{p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}.}$

(c) La variable aléatoire S_N suit une loi binomiale, elle admet donc une espérance Np et une variance $Np(1-p)$. On en déduit que $\mathbb{E}\left(\frac{S_N}{N}\right) = p$ et $\mathbb{V}\left(\frac{S_N}{N}\right) = \frac{p(1-p)}{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à S_N nous donne alors

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{N\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \qquad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}}$$

Partie II — Un deuxième jeu

4. (a) Dans tous les cas l'organisateur garde la pièce de 1 euro qu'il a enlevé.
   - Si le joueur tire la pièce noire alors l'organisateur garde les $n-1$ euros restants et perd la valeur M de la pièce noire, son gain est alors de $1+n-1-M = n-M$.
   - Si le joueur tire une pièce de 1 euro alors l'organisateur garde les $n-2$ euros restants et la pièce noire, son gain est alors de $n-1$.

   On a ainsi $\boxed{G_n(\Omega) = \{n-M, n-1\}}$ puis puisque toutes les pièces sont tirées avec la probabilité $\frac{1}{n}$,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_n = n-M) = \frac{1}{n}, \qquad \mathbb{P}(G_n = n-1) = \frac{n-1}{n}}$$

   (b) On en déduit

$$\mathbb{E}(G_n) = (n-M)\mathbb{P}(G_n = n-M) + (n-1)\mathbb{P}(G_n = n-1) = \frac{(n-M)+(n-1)^2}{n} = \frac{n^2-n+1-M}{n}$$

   Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(G_n) = \frac{n^2-n+1-M}{n}}.$

5. Il suffit d'appliquer le critère de D'Alembert pour les séries entières. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$.

   $\boxed{\text{Les deux séries entières sont donc de rayon de convergence 1.}}$

   De plus, pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}}$$

6. (a) En supposant les pièces indistinguables lors du tirage on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{\mathbb{P}(A|T=n) = \frac{1}{n}}.$

   (b) On a vu à la question 2. que, presque sûrement, au moins un panier sera réussi. La famille $([T=n])_{n\geqslant 1}$ est alors un système complet d'événements.

   La formule des probabilités totales nous donne alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A|T=n)\mathbb{P}(T=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{p\ln((1-(1-p))}{1-p} \\
&= -\frac{p\ln(p)}{q} \\
&= \frac{p}{q}\ln\left(\frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

7. On va admettre ici que $M \in \mathbb{N}$.
   (a) Sachant $T = n$ on a vu que $G_n(\Omega) = \{n-M, n-1\}$. De plus $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$

   On a alors

$$\begin{aligned}
G(\Omega) &= \bigcup_{n\geqslant 1}\{n-M, n-1\} \\
&= \{n-M\ ,\ n\geqslant 1\} \cup \{n-1\ ,\ n\geqslant 1\} \\
&= \{k\in\mathbb{Z}\ ,\ k+M\geqslant 1 \cup \mathbb{N} \\
&= \{k\in\mathbb{Z}\ ,\ k\geqslant 1-M\}
\end{aligned}$$

   En effet $\mathbb{N} \subset \{k \in \mathbb{Z}\ ,\ k \geqslant 1-M\}$.

   On a donc bien $\boxed{G(\Omega) = \{k\in\mathbb{Z}\ ,\ k\geqslant 1-M\}}$.

   (b) Il s'agit simplement de redonner les résultats de la question 4./

$$\boxed{\mathbb{P}(G=k|T=n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} & \text{si } k = n-1 \\ \dfrac{1}{n} & \text{si } k = n-M \\ 0 & \text{si } k \notin \{n-1, n-M\} \end{cases}}$$

   (c) On va de nouveau appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([T_n])_{n\geqslant 1}$

   Soit $k \geqslant 0$, on a alors $k+1 \geqslant 1$ et $k+M \geqslant 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(G=k|T=n)\mathbb{P}(T=n) \\
&= \mathbb{P}(G=k|T=k+1)\mathbb{P}(T=k+1) + \mathbb{P}(G=k|T=k+M)\mathbb{P}(T=k+M) \\
&= \frac{k}{k+1}pq^k + \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1}
\end{aligned}$$

   Si $k \in [\![1-M, -1\}$ alors $k+M \geqslant 1$ mais $k+1 \leqslant 0$ et donc $k+1 \notin T(\Omega)$, d'où

$$\mathbb{P}(G=k) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(G=k|T=n)\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(G=k|T=k+M)\mathbb{P}(T=k+M) = \frac{1}{k+M}pq^{k+M-1}$$

   On a donc bien

$$\boxed{\mathbb{P}(G=k) = \begin{cases} \dfrac{k}{k+1}pq^k + \dfrac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{si } k\geqslant 0 \\[2ex] \dfrac{1}{k+M}pq^{k+M-1} & \text{sinon.} \end{cases}}$$

8. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\mathbb{E}(G_n)\mathbb{P}(T=n) = \frac{n^2-n+1-M}{n}pq^{n-1} = pnq^{n-1} - pq^{n-1} + p(1-M)\frac{q^{n-1}}{n}$$

   Or les séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x^{n-1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n-1}}{n}$ ont toutes les trois pour rayon de convergence 1 et $q \in]0,1[$.

Ainsi, les séries $\sum_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$, $\sum_{n\geqslant 1} q^{n-1}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{q^{n-1}}{n}$ convergent absolument. Par linéarité on en déduit que $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}(G_n)\mathbb{P}(T=n) \text{ converge}}$.

(b) On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(G_n\right)\mathbb{P}(T=n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} pnq^{n-1} - pq^{n-1} + p(1-M)\frac{q^{n-1}}{n}\\
&= p\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} - p\sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} + p(1-M)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^{n-1}}{n}\\
&= \frac{p}{(1-q)^2} - p\frac{1}{1-q} + p(M-1)\frac{\ln(1-q)}{q}\\
&= \frac{1-p}{p} + p(M-1)\frac{\ln(p)}{1-p}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathbb{E}(G) = \frac{1-p}{p} + p(M-1)\frac{\ln(p)}{1-p}}$.

9. (a) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1-p}{p} + p(M-1)\frac{\ln(p)}{1-p} \geqslant 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(1-p)^2}{p^2} + (M-1)\ln(p) \geqslant 0 \qquad \textit{car } \frac{1-p}{p} > 0\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(1-p)^2}{p^2} \geqslant -(M-1)\ln(p)\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(1-p)^2}{p^2}\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{p}\right)} \geqslant M-1 \qquad \textit{car } -\ln(p) > 0
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\mathbb{E}(G) \geqslant 0 \text{ si et seulement si } \psi(p) \geqslant M-1}$.

(b) Là encore on admettra que M est un entier.

Le jeu sera rentable pour $M \leqslant \psi(0.3)+1$. Graphiquement $\psi(0.3) \simeq 4.5$. Pour que le jeu soit rentable $\boxed{\text{il faut donc prendre } M \leqslant 5.}$

(c) Pour que le jeu soit rentable il faut ici que $\psi(p) \geqslant 7$. Graphiquement cela correspond à $\boxed{p \leqslant 0.24}$.

(d) Le jeu ne peut pas être rentable s'il n'existe pas d'entier M supérieur ou égal à 2 tel que $\psi(p) \geqslant M-1$, i.e. lorsque $\psi(p) < 1$. Graphiquement cela correspond approximativement à $\boxed{p \geqslant 0.57}$.